سلَّم تصحيح امتحان مقرر المعادلات الفيزيائية (الفصل الثاني للعام 2016)

السؤال الأول: أوجد حل المعادلة:

$$u_{xy} - y u_y + u = e^{xy}$$

والمحقق للشروط الابتدائية الآتية: $\quad u_y\big|_{y=0} = -x^2 + \frac{1}{2}x \quad , \quad u\big|_{y=0} = 2x + \frac{1}{2}$

ثم استنتج أن الحل ليس وحيداً.

الحل: إن المعادلة المعطاة مكتوبة بالشكل النموذجي، ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u_y = v \quad \Rightarrow u_{xy} = v_x$$

ومنه فالمعادلة المعطاة تكتب بالشكل:

$$v_x - yv + u = e^{xy} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = yv - v_x + e^{xy}} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

وباشتقاق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ y نجد أن:

$$v_{xy} - v - yv_y + u_y = xe^{xy}$$

وبما أن $u_y = v$ فإن :

$$v_{xy} - v - yv_y + v = xe^{xy} \quad \Rightarrow$$

$$v_{xy} - yv_y = xe^{xy}$$

ولحل المعادلة الأخيرة نجري التحويل التالي:

$$v_y = w \quad \Rightarrow v_{xy} = w_x$$

ومنه تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$w_x - yw = xe^{xy}$$

بتثبيت y نحصل على معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالدالة w والمتحول المستقل x ولحلها نوجد عامل التكميل:

$$\mu = e^{\int -y\, dx} = e^{-xy}$$

بضرب طرفي المعادلة الأخيرة تصبح تامة وتكتب بالشكل:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-xy} w\right] = e^{-xy}\left[xe^{xy}\right] = x$$

بالمكاملة بالنسبة لـ x علماً أن y ثابت نجد أنَّ:

$$e^{-xy} w = \frac{1}{2}x^2 + \psi(y) \quad \Rightarrow w = \frac{1}{2}x^2 e^{xy} + \psi(y) e^{xy}$$

ولدينا: $w = v_y$ ومنه فإن المعادلة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$v_y = \frac{1}{2}x^2 e^{xy} + \psi(y) e^{xy}$$

بتثبيت x والمكاملة بالنسبة لـ y نجد أنَّ:

$$\boxed{v = \frac{1}{2}x\, e^{xy} + \int_0^y \psi(\eta) e^{x\eta} d\eta + \varphi(x)} \Rightarrow \boxed{u_y = \frac{1}{2}x\, e^{xy} + \int_0^y \psi(\eta) e^{x\eta} d\eta + \varphi(x)}$$

لنشتق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ x فنجد أن:

$$\boxed{v_x = \frac{1}{2}(1+xy)e^{xy} + \int_0^y \eta\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta + \varphi'(x)}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في العلاقة $(*)$ نجد أنَّ:

$$u = yv - v_x + e^{xy} =$$

$$= \frac{1}{2}xy\,e^{xy} + \int_0^y y\,\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta + y\,\varphi(x) - \frac{1}{2}(1+xy)e^{xy} - \int_0^y \eta\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta - \varphi'(x) + e^{xy} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2}e^{xy} + \int_0^y (y-\eta)\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta + y\,\varphi(x) - \varphi'(x)$$

وهو الحل العام المطلوب.

$$u(x,y) = \frac{1}{2}e^{xy} + \int_0^y (y-\eta)\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta + y\,\varphi(x) - \varphi'(x)$$

وللحصول على الحل المحقق للشروط الابتدائية نطبق هذه الشروط على الحل العام:

تطبيق الشرط الأول:

$$2x + \frac{1}{2} = u\big|_{y=0} = \frac{1}{2} - \varphi'(x) \Rightarrow \boxed{\varphi'(x) = -2x} \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = -x^2}$$

تطبيق الشرط الثاني: $-x^2 + \frac{1}{2}x = u_y\big|_{y=0} = \frac{1}{2}x + \varphi(x) \Rightarrow \boxed{\varphi(x) = -x^2}$

وبالاستفادة مما سبق نجد أن الحل المطلوب هو:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}e^{xy} - x^2y + 2x + \int_0^y (y-\eta)\psi(\eta)e^{x\eta}d\eta}$$

حيث أن $\psi(y)$ دالة اختيارية ، وبالتالي يتضح أن للمعادلة المعطاة عدد غير منته من الحلول والتي تحقق الشروط السابقة.

السؤال الثاني: لتكن لدينا المسألة الحدية الآتية:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t) \quad , \quad (0 < x < \ell \, , \, t > 0)$$

والشروط الابتدائية: $u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad u_t(x,0) = \psi(x) \quad , \quad 0 \le x \le \ell$

والشروط الحديَّة: $u(0,t) = 0 \quad , \quad u(\ell,t) = 0 \quad , \; t \ge 0$

والمطلوب:

1) أثبت أنَّ حل المسألة الحديَّة المعطاة يطابق الصفر، وذلك بفرض أنَّ $f(x,t) = 0$ والبارامیتر $\lambda < 0$ (ثابت الفصل).

2) أوجد حل مسألة كوشي الموافقة، في حالة: $a = 1 \; , \; f(x,t) = 1 \; , \; \psi(x) = 0 \; , \; \varphi(x) = x^2$

3) أوجد حل المسألة الحديَّة المعطاة، وذلك بفرض أنَّ:

$$f(x,t) = \sin 2x \sin 2t \quad , \quad \varphi(x) = 0 \; , \; \psi(x) = 0 \; , \; \ell = \pi \quad , \; a = 1 \; , \; \lambda > 0$$

الحـل:

1) من أجل $f(x,t)=0$ نحصل على المسألة الحدية المتجانسة بالشروط الحديَّة الصفرية أي:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}\quad,\quad(0<x<\ell\,,\,t>0)\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

والشروط الابتدائية: $u(x,0)=\varphi(x)\quad,\quad u_t(x,0)=\psi(x)\quad,\quad 0\le x\le\ell\quad\cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحديَّة: $u(0,t)=0\quad,\quad u(\ell,t)=0\quad,\ t\ge 0\quad\cdots\cdots\cdots(3)$

الاثبات: سوف نبحث عن حل مغاير للحل الصفري للمسألة الحدية من الشكل:

$$u(x,t)=X(x).T(t)\ ;\ X(x).T(t)\neq 0\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

علماً أن $X(x)$ هي دالة تابعة لـ x فقط ، و $T(t)$ هي دالة تابعة لـ t فقط.

باشتقاق العلاقة (4) مرتين بالنسبة لـ x ، ومرتين بالنسبة لـ t نجد أنَّ:

$$u_{xx}=X''(x).T(t)$$
$$u_{tt}=X(x).T''(t)$$

نعوض في المعادلة (1) فنجد أنَّ:

$$X(x).T''(t)=a^2X''(x).T(t)$$

نقسم الطرفين على المقدار $a^2X(x).T(t)\neq 0$ فحصل على:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

بما أن الطرفين الأيمن والأيسر من العلاقة السابقة يحتفظان عند تغير متغيريهما بقيمة ثابتة، فإن العلاقة الأخيرة تكتب بالشكل:

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$$

أي أن:

$$X''(x)+\lambda X(x)=0\quad,\ X(x)\neq 0\quad\cdots\cdots\cdots(5)$$
$$T''(t)+a^2\lambda T(t)=0\quad,\ T(t)\neq 0\quad\cdots\cdots\cdots(6)$$

من الشروط الحدية (3) نجد أنَّ:

$$0=u(0,t)=X(0).T(t)\ \Rightarrow X(0)=0\ ;\ T(t)\neq 0$$
$$0=u(\ell,t)=X(\ell).T(t)\ \Rightarrow X(\ell)=0\ ;\ T(t)\neq 0$$

ولنعين قيم λ التي يوجد عندها حل غير صفري للمسألة:

$$\left.\begin{array}{l}X''(x)+\lambda X(x)=0\\ X(0)=X(\ell)=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

ومن أجل $\lambda<0$: أي أنَّ $-\lambda>0$ ، ومنه فإنَّ المعادلة المميزة للمعادلة (7) هي:

$$\rho^2+\lambda=0 \Rightarrow \rho^2=-\lambda \Rightarrow \rho=\mp\sqrt{-\lambda}$$

أي أن الجذور للمعادلة المميزة هي جذور حقيقية وعندها يعطى حل المسألة (7) بالشكل:

$$X(x)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

وبالاعتماد على الشروط الموافقة للمعادلة (7) نجد أنَّ:

$$0=X(0)=c_1+c_2 \Rightarrow \boxed{c_2=-c_1} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

$$0=X(\ell)=c_1e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}+c_2e^{\sqrt{-\lambda}\ell} \quad \cdots\cdots\cdots(**)$$

وبتعويض $(*)$ في $(**)$ نجد أنَّ:

$$c_1e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}-c_1e^{\sqrt{-\lambda}\ell}=0 \Rightarrow c_1\left(e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}-e^{\sqrt{-\lambda}\ell}\right)=0 \Rightarrow c_1=0$$

وبالتعويض في $(*)$ نجد أنَّ: $c_2=0$ ، وفي هذه الحالة تكون $X(x)=0$ وبالتالي $u(x,t)=0$ أي أنَّ الحل يطابق الحل الصفري في هذه الحالة.

2) إنَّ مسألة كوشي الموافقة للمسألة الحديَّة المعطاة تملك الشكل:

$$\frac{1}{a^2}u_{tt}=u_{xx}+f(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \ , \ u_t(x,0)=\psi(x) \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

ولدينا من معطيات المسألة أنَّ: $\varphi(x)=x^2 \ , \ \psi(x)=0 \ , \ f(x,t)=1 \ , \ a=1$.

وبالتالي فإنَّ:

$$I_1=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+t)+\varphi(x-t)\right]=\frac{1}{2}\left[(x+t)^2+(x-t)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x^2+2xt+t^2+x^2-2xt+t^2\right]=\frac{1}{2}\left[2x^2+2t^2\right]=x^2+t^2$$

$$I_2=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi=0 \ ; \ \psi(\xi)=0$$

$$I_3=\frac{a}{2}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}(1)\,d\xi d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}d\xi\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\xi\right]_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\left[x+(t-\tau)\right]-\left[x-(t-\tau)\right]\right]d\tau=\int_0^t(t-\tau)d\tau=\left[t\tau-\frac{1}{2}\tau^2\right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$=t^2-\frac{1}{2}t^2=\frac{1}{2}t^2$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ الحل المطلوب:

$$u(x,t)=x^2+t^2+0+\frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \boxed{u(x,t)=x^2+\frac{3}{2}t^2}$$

3) إن المسألة الحدية المعطاة غير متجانسة بشروط حدية صفرية وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)+D_n\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}at\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) \quad \cdots\cdots(*)$$

علماً أنَّ:

$$C_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi \qquad , \quad D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

$$T_n(t)=\frac{\ell}{n\pi a}\int_0^{t}f_n(\tau)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}a(t-\tau)\right)d\tau$$

$$f_n(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(\xi,t)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}\xi\right)d\xi$$

ولدينا من معطيات المسألة أنَّ:

$$f(x,t)=\sin 2x\sin 2t \quad , \quad \varphi(x)=0 \ , \ \psi(x)=0 \ , \ \ell=\pi \quad , \ a=1 \ , \ \lambda>0$$

وبما أن $\varphi(x)=0$ فإنَّ $\varphi(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $C_n=0$، وبما أن $\psi(x)=0$ فإنَّ $\psi(\xi)=0$ وبالتالي فإنَّ $D_n=0$، وبالتالي:

$$f_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2\xi\sin 2t\sin\left(\frac{n\pi}{\pi}\xi\right)d\xi=\frac{2}{\pi}\sin 2t\int_0^{\pi}\sin 2\xi\sin(n\xi)d\xi=$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin 2t\begin{cases}\frac{\pi}{2} & , \ n=2\\ 0 & , \ n\neq 2\end{cases} \Rightarrow \boxed{f_n(t)=\begin{cases}\sin 2t & , \ n=2\\ 0 & , \ n\neq 2\end{cases}}$$

وبما أن $f_n(t)=0$ من أجل $n\neq 2$ فإنَّ $T_n(t)=0$ من أجل $n\neq 2$ ومنه فإنَّ:

$$T_2(t)=\frac{\pi}{(2)\pi(1)}\int_0^{t}f_2(\tau)\sin\left(\frac{(2)\pi}{\pi}(1)(t-\tau)\right)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^{t}\sin 2\tau\sin\left[2(t-\tau)\right]d\tau$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{t}\left[\cos(2\tau+2(t-\tau))-\cos(2\tau-2(t-\tau))\right]d\tau=-\frac{1}{4}\int_0^{t}\left[\cos(2t)-\cos(4\tau-2t)\right]d\tau$$

$$=-\frac{1}{4}\left[\cos(2t)\int_0^{t}d\tau-\int_0^{t}\cos(4\tau-2t)\,d\tau\right]=-\frac{1}{4}\left[t\cos(2t)-\frac{1}{4}\left[\sin(4\tau-2t)\right]_{\tau=0}^{\tau=t}\right]$$

$$=-\frac{1}{4}\left[t\cos(2t)-\frac{1}{4}\left[\sin(2t)-\sin(-2t)\right]\right]=-\frac{1}{4}\left[t\cos(2t)-\frac{1}{2}\sin(2t)\right]$$

$$=\frac{1}{8}\left[\sin 2t-2t\cos 2t\right]$$

وبالتالي أصبح لدينا:

$$T_n(t)=\begin{cases}\frac{1}{8}\left[\sin 2t-2t\cos 2t\right] & ; n=2\\ 0 & ; n\neq 2\end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في صيغة الحل العام $(*)$ نجد أن:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{1}{8}\left[\sin 2t-2t\cos 2t\right]\sin 2x}$$

السؤال الثالث: أوجد حل المعادلة:

$$u_t=u_{xx}+u+\cos x \quad , \left(0<x<\frac{\pi}{2}, t>0\right) \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

والمحقق للشرط الابتدائي: $u\big|_{t=0}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

والشروط الحدية: $u_x\big|_{x=0}=0 \quad , \quad u\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(3)$

الحل: إن المعادلة المعطاة من النمط المكافئ وذات الأمثال الثابتة وفيها:

$$a=1, b=0, c=1, f(x,t)=\cos x, \varphi(x)=0$$

ولحلها نجري التحويل التالي:

$$u(x,t)=e^{\left[c-\frac{b^2}{4a^2}\right]t-\frac{b}{2a^2}x}v(x,t) \Rightarrow u(x,t)=e^{\left[1-\frac{(0)^2}{4(1)^2}\right]t-\frac{(0)}{2(1)^2}x}v(x,t) \Rightarrow$$
$$u(x,t)=e^{t}v(x,t) \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

وبالاشتقاق مرة بالنسبة t ومرتين بالنسبة لـ x ، ثم التعويض في (1) و (2) و (3) على الترتيب نجد أنَّ:

$$u_t=e^{t}v+e^{t}v_t \quad , \; u_{xx}=e^{t}v_{xx}$$

نعوض في (1) لنجد أنَّ:

$$e^{t}v+e^{t}v_t=e^{t}v_{xx}+e^{t}v+\cos x \quad \Rightarrow \; v_t=v_{xx}+e^{-t}\cos x$$

نعوض في (2) لنجد أنَّ:

$$0=u(x,0)=e^{(0)}v(x,0) \Rightarrow v(x,0)=0$$

نعوض في (3) لنجد أنَّ:

$$u=e^{t}v \Rightarrow u_x=e^{t}v_x \Rightarrow$$
$$0=u_x(0,t)=e^{t}v_x(0,t) \Rightarrow v_x(0,t)=0$$
$$0=u\left(\frac{\pi}{2},t\right)=e^{t}v\left(\frac{\pi}{2},t\right) \Rightarrow v\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0 \; ; e^{t}\neq 0$$

وبالتالي فالمسألة الجديدة هي:

$$v_t = v_{xx} + e^{-t}\cos x \quad \cdots\cdots\cdots (1')$$

مع الشرط الابتدائي:
$$v(x,0) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (2')$$

والشروط الحدية الصفرية:
$$v_x(0,t) = 0 \ , \ v\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (3')$$

وهذه المسألة الجديدة فيها: $\overline{\varphi}(x) = 0 \ , \ \overline{f}(x,t) = e^{-t}\cos x \ , \ \ell = \frac{\pi}{2} \ , \ a = 1$ ، وهي مسألة حدية غير متجانسة بالشروط الحدية الصفرية (والشروط الحدية تعاني من اشتقاق) وحلها يعطى بالدستور التالي:

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 t} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell} x\right) \quad \cdots\cdots\cdots (4')$$

علماً أن:

$$C_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \overline{\varphi}(\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi \quad , \quad v_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2\ell}\right)^2 (t-\tau)} \overline{f_n}(\tau)\,d\tau$$

$$\overline{f_n}(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \overline{f}(\xi,t)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\ell}\xi\right)d\xi$$

وبما أنَّ $\overline{\varphi}(x) = 0$ فإنَّ $\overline{\varphi}(\xi) = 0$ ، ومنه فإنَّ $C_n = 0$.

وكما أنَّ:

$$\overline{f_n}(t) = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}\cos(\xi)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2\frac{\pi}{2}}\xi\right)d\xi = \frac{4}{\pi}e^{-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi\cos\left[(2n+1)\xi\right]d\xi =$$

$$= \frac{4}{\pi}e^{-t}\begin{cases} \frac{\pi}{4} & ; \ n = 0 \\ 0 & ; \ n \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \overline{f_n}(t) = \begin{cases} e^{-t} \ ; n = 0 \\ 0 \ ; \ n \neq 0 \end{cases}$$

وبما أن $\overline{f_n}(t) = 0 \ , n \neq 0$ فإنَّ $v_n(t) = 0 \ ; \ n \neq 0$ وبالتالي يكون:

$$v_0(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{(2(0)+1)\pi(1)}{2\frac{\pi}{2}}\right)^2 (t-\tau)} \overline{f_0}(\tau)\,d\tau = \int_0^t e^{-(t-\tau)}.e^{-\tau}\,d\tau = e^{-t}\int_0^t d\tau = t\,e^{-t} \Rightarrow$$

$$v_n(t) = \begin{cases} t\,e^{-t} & , \ n = 0 \\ 0 & , \ n \neq 0 \end{cases}$$

وبالاستفادة مما سبق والتعويض في الحل $(4')$ نجد أنَّ:

$$\boxed{v(x,t) = te^{-t}\cos x} \quad \cdots\cdots\cdots (5')$$

وبتعويض العلاقة $(5')$ في العلاقة (4) نجد أن الحل العام للمسألة الحدية المعطاة هو:

$$\boxed{u(x,t)=e^{t}\left[te^{-t}\cos x\right]=t\cos x}$$

السؤال الرابع: أوجد الحل العام لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الأسطوانية:

$$\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^{2}}\frac{\partial^{2}u}{\partial\varphi^{2}}=0$$

داخل دائرة نصف قطرها a.

تطبيق: أوجد حل المعادلة السابقة والمحقق للشرط الحدي: $\left(u-u_{\rho}\right)\Big|_{\rho=1}=\cos\varphi\left(\cos\varphi+\sin\varphi\right)$ ، ثم استنتج أنَّ الحل ليس وحيداً.

الحل: سوف نبحث عن حل من الشكل:

$$u(\rho,\varphi)=R(\rho).\Phi(\varphi)\neq 0\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

نشتق هذه العلاقة:

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=R'(\rho).\Phi(\varphi)\quad ,\quad \frac{\partial^{2}u}{\partial\varphi^{2}}=R(\rho).\Phi''(\varphi)$$

نعوض في معادلة لابلاس فنجد أنَّ:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho R'(\rho).\Phi(\varphi)\right]+\frac{1}{\rho^{2}}\left[R(\rho).\Phi''(\varphi)\right]=0\quad\Rightarrow\left(\times\rho^{2}\right)$$

$$\rho\Phi(\varphi)\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]+R(\rho).\Phi''(\varphi)=0$$

وبقسمة طرفي العلاقة الأخيرة على $R(\rho).\Phi(\varphi)\neq 0$ نجد أن :

$$\frac{\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]}{R(\rho)}+\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=0\quad\Rightarrow\quad\frac{\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]}{\frac{R(\rho)}{\rho}}=-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\lambda$$

ومن هذا التناسب نحصل على المعادلتين:

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0\quad ,\ \Phi(\varphi)\neq 0\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left[\rho R'(\rho)\right]-\lambda R(\rho)=0\ ,\ R(\rho)\neq 0\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

إن المعادلة (2) هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية وذات أمثال ثابتة وحلها يعطى بالشكل:

$$\Phi(\varphi)=A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)+B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)$$

علماً أن A,B ثوابت ، ونشير إلى أنه عند تغير الزاوية φ بمقدار 2π يجب أن تعود الدالة أحادية القيمة $u(\rho,\varphi)$ إلى قيمتها الأصلية أي: $u(\rho,\varphi+2\pi)=u(\rho,\varphi)$ ، ومن هنا سينتج أن $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ أي أن الدالة $\Phi(\varphi)$ تعتبر دالة دورية في الزاوية φ بفترة دورية 2π ، وهذا يكون ممكناً إذا كان $\sqrt{\lambda}=n$ حيث أن n عدد صحيح

وبالتالي فإنَّ:

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)$$

ومن جهة أخرى سنبحث عن حل للمعادلة (3) من الشكل:

$$R(\rho) = \rho^{\mu}$$

حيث أن μ ثابت يطلب تحديده، ومن أجل ذلك نشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ ρ :

$$R'(\rho) = \mu\rho^{\mu-1}$$

ثم نعوض في المعادلة (3)، مع تعويض قيمة $\lambda = n^2$ فيها:

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left[\rho\mu\rho^{\mu-1}\right] - n^2\rho^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow \rho \frac{d}{d\rho}\left[\mu\rho^{\mu}\right] - n^2\rho^{\mu} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\rho\left[\mu^2\rho^{\mu-1}\right] - n^2\rho^{\mu} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\mu^2 - n^2\right)\rho^{\mu} = 0 \Rightarrow\; \mu^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \mu = \mp n$$

وبالتالي نجد أنَّ:

$$R(\rho) = C\rho^{n} + D\rho^{-n}$$

لحل المسألة الداخلية يجب أن نضع $(\mu = n)$ فيكون:

$$R(\rho) = C\rho^{n}$$

وذلك لأنه إذا كان $D \neq 0$ فإنَّ $u(\rho,\varphi) = R(\rho).\Phi(\varphi)$ تؤول إلى ما لانهاية عند $\rho = 0$ ولا تعتبر دالة توافقية داخل الدائرة، وبالتالي فإنَّ الحلول الخاصة للمسألة الداخلية هي:

$$u_n(\rho,\varphi) = \rho^{n}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \;;\; \rho \le a \quad , C = 1$$

علماً أن a نصف قطر الدائرة ، ويكون الحل العام هو مجموع الحلول الخاصة:

$$\boxed{u(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) \;;\; \rho \le a} \quad \cdots\cdots\cdots(*)$$

حل التطبيق: إنَّ الشرط الحدي المعطى يكتب بالشكل:

$$\left(u - u_{\rho}\right)\Big|_{\rho=1} = \cos\varphi\left(\cos\varphi + \sin\varphi\right) = \cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

إن حل المسألة المعطاة يعطى بالدستور التالي:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

ومنه فإنَّ:

$$u_{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

وبالتالي فإنَّ:

$$u - u_{\rho} = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\rho - n)\rho^{n-1}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right)$$

وبتطبيق الشرط الحدي نجد أنَّ:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi=\left(u-u_{\rho}\right)\Big|_{\rho=1}=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(1-n)\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right)$$

$$=A_0+0\left(A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi\right)-\left(A_2\cos 2\varphi+B_2\sin 2\varphi\right)-\cdots\cdots\cdots$$

وبالمطابقة نجد أنَّ:

$$A_0=\frac{1}{2}\ ,\ A_2=-\frac{1}{2}\ ,\ B_2=-\frac{1}{2}\ ,\ A_n=B_n=0\ ;\ n=3,4,.....\ ,\ \forall A_1,B_1$$

وبالتعويض في عبارة الحل نجد أنَّ:

$$\boxed{u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2}+\rho\left(A_1\cos\varphi+B_1\sin\varphi\right)-\frac{\rho^2}{2}\left(\cos 2\varphi+\sin 2\varphi\right)\ ,\ \forall A_1,B_1}$$

ومن هنا يتضح أن للمسألة الحدية المعطاة عدد غير منته من الحلول.

أ. أحمد حاتم أبو حاتم
0947075489